



Facultatea de Inginerie Electrică, Energetică
și Informatică Aplicată (IEEIA)



Identificarea și Modelarea Sistemelor

C9

Prof.univ.dr.ing. Marian-Silviu Poboroniuc

5. IDENTIFICAREA STATISTICĂ A SISTEMELOR

Este abordată *problema determinării directe a modelului parametric* al unui sistem din datele de intrare-ieșire.

La baza dezvoltării metodele de identificare statistică stau următoarele elemente:

- **Modelul** utilizat este de tip **ecuația stocastică cu diferențe**, foarte avantajoasă din punct de vedere numeric;
- **Teoria estimației** se aplică pentru soluționarea problemelor de identificare; avantaje față de metodele de optimizare parametrică;
- **Semnalul de intrare** este considerat **necorelat** cu perturbațiile; aceasta presupune că sistemele sunt fără reacție.
- **Prelucrarea datelor** se poate face fie **off-line**, fie **on-line**.

5.1. Concepte de identificabilitate

Se consideră, de exemplu, un sistem (S) liniar, discret în timp, având ca perturbație un proces aleator cu densitate spectrală rațională, descris de ecuația:

$$\begin{aligned} (S) \quad & y(k) = H^*(q^{-1})u(k) + H_1^*(q^{-1})e^*(k) \\ & \text{cov } e^*(k) = \lambda^{*2} I \end{aligned} \quad (5.1)$$

Sistemul (S) este caracterizat de:

- vectorul parametrilor adevărați θ^* care conține coeficienții funcțiilor de transfer $H^*(q^{-1})$ și $H_1^*(q^{-1})$;
- λ^{*2} este dispersia zgomotului alb $e^*(k)$.
- Numărul și valorile parametrilor adevărați cât și λ^{*2} sunt necunoscute.

(S)

$$y(k) = H^*(q^{-1})u(k) + H_1^*(q^{-1})e^*(k)$$
$$\text{cov } e^*(k) = \lambda^{*2}I$$

(5.1)

În aceste ipoteze este rațională alegerea unui model M din clasa de modele (M_{12})

(M)

$$y(k) = H(q^{-1})u(k) + H_1(q^{-1})e(k)$$
$$\text{cov } e(k) = \lambda^2I$$

(5.2)

cu vectorul θ al parametrilor și dispersia λ^2 a zgomotului, care trebuie determinați din datele de intrare–ieșire printr-o anumită metodă de estimare.

Numărul parametrilor depinde de indicii de structură, deci de gradele polinoamelor funcțiilor de transfer $H(q^{-1})$ și $H_1(q^{-1})$.

Pentru o structură dată, clasa de modele (M) conține o infinitate de modele, în funcție de valorile parametrilor θ . Este posibil ca vectorul θ să coincidă sau nu cu valorile adevărate θ^* .

Pentru o structură precizată se definește mulțimea valorilor parametrilor modelului

$$D(S, M) = \{\theta \mid H(q^{-1}) \equiv H^*(q^{-1}), H_1(q^{-1}) \equiv H_1^*(q^{-1}); \lambda^2 = \lambda^{*2}\} \quad (5.3)$$

care reprezintă acei parametri pentru care structura precizată a modelului reprezintă perfect sistemul.

În funcție de structură pot apărea situațiile:

- $D(S, M)$ este o mulțime vidă. În acest caz modelul este **subparametrizat** (conține prea puțini parametri) și nu poate să se descrie adecvat sistemul.
- $D(S, M)$ conține un singur element. Acesta este **cazul ideal**, elementul fiind chiar vectorul valorilor adevărate ale parametrilor.
- $D(S, M)$ conține mai multe elemente. Deci există mai multe modele care dau o descriere perfectă a sistemului. În acest caz modelul conține mai mulți parametri decât sistemul (model **supraparametrizat**).

Exemplul 5.1. Se consideră sistemul (procesul tehnologic) descris de ecuațiile

$$(S) \quad \begin{aligned} A^*(q^{-1})y(k) &= B^*(q^{-1})u(k) + C^*(q^{-1})e^*(k) \\ \text{cov } e^*(k) &= \lambda^{*2} I \end{aligned} \quad (5.4)$$

unde

$$\begin{aligned} A^*(q^{-1}) &= 1 + a_1^* q^{-1} + \dots + a_{na}^* q^{-na} \\ B^*(q^{-1}) &= b_1^* q^{-1} + b_2^* q^{-2} + \dots + b_{nb}^* q^{-nb} \\ C^*(q^{-1}) &= 1 + c_1^* q^{-1} + \dots + c_{nc}^* q^{-nc} \end{aligned}$$

sunt polinoame presupuse prime între ele. De asemenea, se consideră clasa de modele

$$(M) \quad \begin{aligned} A(q^{-1})y(k) &= B(q^{-1})u(k) + C(q^{-1})e(k) \\ \text{cov } e(k) &= \lambda^2 I \end{aligned} \quad (5.5)$$

unde

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{na} q^{-na} \\ B(q^{-1}) &= b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \dots + b_{nb} q^{-nb} \\ C(q^{-1}) &= 1 + c_1 q^{-1} + c_2 q^{-1} + \dots + c_{nc} q^{-nc} \end{aligned}$$

În acest caz mulțimea $D(S, M)$ devine

$$D(S, M) = \left\{ \theta \left| \frac{B^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})} = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}; \frac{C^*(q^{-1})}{A^*(q^{-1})} = \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}; \lambda^* = \lambda \right. \right\} \quad (5.6)$$

sau echivalent

$$D(S, M) = \left\{ \theta \left| \lambda^* = \lambda; \frac{A(q^{-1})}{A^*(q^{-1})} \equiv \frac{B(q^{-1})}{B^*(q^{-1})} \equiv \frac{C(q^{-1})}{C^*(q^{-1})} \right. \right\} \quad (5.7)$$

Dacă se presupune $na < na^*, nb < nb^*, nc < nc^*$ se ajunge la contrazicerea faptului că polinoamele A, B, C ar fi prime între ele. Șirul de egalități este posibil dacă $na \geq na^*, nb \geq nb^*, nc \geq nc^*$

$$n^* = \min(na - na^*, nb - nb^*, nc - nc^*) \geq 0 \quad (5.8)$$

În acest caz este evident că

$$\frac{A(q^{-1})}{A^*(q^{-1})} \equiv \frac{B(q^{-1})}{B^*(q^{-1})} \equiv \frac{C(q^{-1})}{C^*(q^{-1})} = L(q^{-1})$$

unde $L(q^{-1}) = 1 + l_1 q^{-1} + \dots + l_{n^*} q^{-n^*}$ este un polinom de grad n^* cu coeficienți arbitrari.

Șirul de egalități este echivalent cu sistemul:

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= A^*(q^{-1})L(q^{-1}) \\ B(q^{-1}) &= B^*(q^{-1})L(q^{-1}) \\ C(q^{-1}) &= C^*(q^{-1})L(q^{-1}) \end{aligned} \tag{5.10}$$

ceea ce arată că în acest caz polinoamele modelului sunt “proporționale” cu cele adevărate.

Astfel dacă $n^* > 0$, există o infinitate de soluții ale problemei, obținute pentru diferite valori ale coeficienților polinomului $L(q^{-1})$.

Dacă $n^* = 0$, $L(q^{-1}) = 1$ și problema are soluție unică. Condiția $n^* = 0$ arată că cel puțin unul din polinoamele A, B, C are același grad ca polinomul corespunzător al sistemului.

În concluzie, pentru un model ARMAX, dacă structura este aleasă astfel încât:

a) $n^* < 0$, atunci mulțimea $D(S, M)$ este vidă;

- b) $n^* = 0$, atunci mulțimea $D(S, M)$ are un singur element.
- c) $n^* > 0$, atunci mulțimea $D(S, M)$ are o infinitate de elemente

Se poate stabili legătura dintre conceptul de identificabilitate și conceptele de sistem (S), model (M), condițiile experimentale (E)- care se referă la calitatea datelor de intrare-ieșire din sistem și metoda de estimare – identificare a parametrilor (I) sau de soluționare propriu-zisă a identificării pentru un model de structură dată.

Dacă θ este vectorul parametrilor unui model ales și $\hat{\theta}$ este valoarea acestui vector dedusă din datele de intrare-ieșire concrete, atunci rezultă că $\hat{\theta} = \hat{\theta}(S, M, I, E, N)$ este o funcție de sistem, model, metoda de estimare, condiții experimentale și volumul datelor experimentale N .

Definiția 5.1. Un sistem S este **identificabil** și se notează $SI(M, I, E)$ dacă $\hat{\theta}(S, M, I, E, N) \xrightarrow{cp} D(S, M)$ când $N \rightarrow \infty$ (c.p. - converge în probabilitate) ; $D(S, M) \neq \emptyset$ (mulțimea vidă) .

5.2. Metoda celor mai mici pătrate off – line

Dintre metodele de estimare parametrică directă, metoda celor mai mici pătrate, *CMMP*, este cea mai veche. Metoda se utilizează pentru determinarea modelului părții deterministe al unui sistem perturbat folosind drept criteriu eroarea medie pătratică de modelare, fig.5.1.

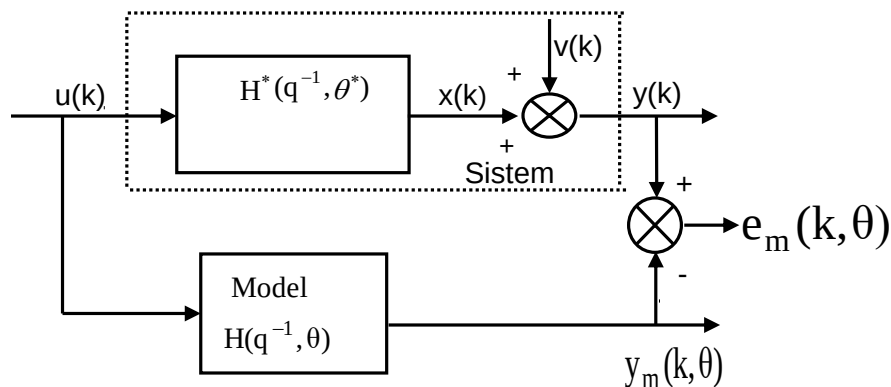


Fig. 5.1

$$V(e_m(k, \theta)) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e_m^2(k, \theta) \quad (5.11)$$

unde $e_m(k, \theta) = y(k) - y_m(k, \theta)$ (5.12)

Se consideră un sistem monovariabil (S/SO) descris de ecuațiile cu diferențe:

$$\begin{aligned} A^*(q^{-1})y(k) &= B^*(q^{-1})u(k) + v(k) \\ A^*(q^{-1}) &= 1 + a_1^*q^{-1} + \dots + a_{na^*}^*q^{-na^*} \\ B^*(q^{-1}) &= b_1^*q^{-1} + \dots + b_{nb^*}^*q^{-nb^*} ; k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.13)$$

și se presupune că ipotezele statistice generale $I_1 \div I_6$ sunt îndeplinite. Se introduc notațiile:

$$\theta^* = [a_1^*, \dots, a_{na^*}^*, b_1^*, \dots, b_{nb^*}^*]^T \quad (5.14)$$

$$\bar{\varphi}(k) = [-y(k-1), \dots, -y(k-na^*), u(k-1), \dots, u(k-nb^*)]^T$$

Vectorul θ^* este vectorul parametrilor sistemului; vectorul $\bar{\varphi}(k)$ este funcție de datele de intrare și de ieșire până la momentul k și reprezintă **"istoria" evoluției procesului**. Cu aceste notații sistemul (5.13) se scrie în forma

$$y(k) = \bar{\varphi}^T(k) \theta^* + v(k) \quad (5.15)$$

Fiind cunoscute datele de intrare - ieșire din sistem conținute în vectorii:

$$U = [u(1), u(2), \dots, u(N)]^T$$

$$Y = [y(1), y(2), \dots, y(N)]^T$$

problema de identificare se referă la determinarea parametrilor modelului :

$$A(q^{-1})y_m(k) = B(q^{-1})u(k)$$

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_{na}q^{-na}$$

$$B(q^{-1}) = b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \dots + b_{nb}q^{-nb} \quad . \quad (5.16)$$

astfel încât eroarea medie pătratică de modelare să fie minimă. Funcția criteriu se poate explicita astfel

$$\begin{aligned} V_1(\theta) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y(k) - y_m(k, \theta))^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(y(k) - \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k) \right)^2 = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{A^2(q^{-1})} (A(q^{-1})y(k) - B(q^{-1})u(k))^2 \end{aligned} \quad (5.17)$$

Se observă că funcția criteriu este puternic neliniară în parametri.

Pentru obținerea soluției:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} V(\theta) \quad (5.18)$$

trebuie utilizat un algoritm de gradient, care deseori presupune un volum mare de calcule. Dacă se folosește criteriul celor mai mici pătrate ponderate:

$$V(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N A^2(q^{-1})(y(k) - y_m(k, \theta))^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N A^2(q^{-1})e_m^2(k, \theta)$$

sau

$$\begin{aligned} V(\theta) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (A(q^{-1})y(k) - B(q^{-1})u(k))^2 = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y(k) - \varphi^T(k)\theta)^2 \end{aligned} \quad (5.19)$$

criteriul devine pătratic în parametrii θ și problema se poate rezolva analitic. În relația (5.19) s-a notat

$$\varphi(k) = [-y(k-1), \dots, -y(k-na), u(k-1), \dots, u(k-nb)]^T \quad (5.20)$$

Estimatorul celor mai mici pătrate $\hat{\theta}_{CMMP} = \hat{\theta}_{LS}$
se obține din ecuațiile :

$$\nabla V(\theta) = \frac{\partial V(\theta)}{\partial \theta} = 2 \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (-\varphi(k)) (y(k) - \varphi^T(k)\theta) = 0$$

$$\nabla^2 V(\theta) = \frac{\partial^2 V(\theta)}{\partial \theta^2} = 2 \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\varphi(k)) \varphi^T(k) > 0$$

și este dat de relația

$$\hat{\theta}_{LS} = \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) \varphi^T(k) \right)^{-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) y(k) \right) \quad (5.21)$$

Estimatorul $\hat{\theta}_{LS}$ este funcție de datele măsurate de intrare - ieșire
și există dacă matricea hessian este pozitiv definită.

Cu notația

$$\Phi = [\varphi(1) \dots \varphi(N)]^T \quad \text{sau} \quad \Phi = \begin{bmatrix} \varphi^T(1) \\ \vdots \\ \varphi^T(N) \end{bmatrix}$$

estimatorul poate fi pus într-o formă mai simplă

Cu notația

$$\Phi = [\varphi(1) \dots \varphi(N)]^T \quad \text{sau} \quad \Phi = \begin{bmatrix} \varphi^T(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi^T(N) \end{bmatrix}$$

estimatorul poate fi pus într-o formă mai simplă

$$\hat{\theta}_{LS} = \left[\frac{1}{N} \Phi^T \cdot \Phi \right]^{-1} \frac{1}{N} \Phi^T Y = (\Phi^T \cdot \Phi)^{-1} \Phi^T Y \quad (5.22)$$

cu condiția

$$\Phi^T \Phi > 0$$

Relația (5.22) se implementează mai greu numeric (necesită memorarea matricei Φ de dimensiuni foarte mari)

$$\hat{\theta}_{LS} = \left[\frac{1}{N} \Phi^T \cdot \Phi \right]^{-1} \frac{1}{N} \Phi^T Y = (\Phi^T \cdot \Phi)^{-1} \Phi^T Y \quad (5.22)$$

cu condiția $\Phi^T \Phi > 0$

Observații :

1. Criteriul $V(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y(k) - \varphi^T(k)\theta)^2$ poate fi privit ca un

criteriu al erorii de predicție. Se observă că

$$\begin{aligned} \varphi^T(k)\theta = & -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) \dots - a_{na} y(k-na) + \\ & + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \dots + b_{nb} u(k-nb) = y(k/(k-1)) \end{aligned} \quad (5.23)$$

este **predictorul de pas** a lui $y(k)$, (o funcție de datele trecute ale intrării și ieșirii), iar

$$y(k) - \varphi^T(k)\theta = y(k) - y(k | k-1) = \varepsilon_p(k, \theta) \quad (5.24)$$

este **eroarea de predicție de pas**. Rezultă că estimatorul $\hat{\theta}_{LS}$ poate fi privit ca estimator care minimizează eroarea de predicție de pas (*MEP*).

2. Diferențele

$$\varepsilon(k) = A(q^{-1})y(k) - B(q^{-1})u(k) = y(k) - \varphi^T(k)\theta$$

se numesc **reziduali**. Cu această notație modelul (M) poate fi scris

$$(M) \quad A(q^{-1})y(k) - B(q^{-1})u(k) = \varepsilon(k) \quad (5.25)$$

și estimatorul CMMP se obține prin minimizarea funcției criteriu

$$V(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varepsilon^2(k) = E[\varepsilon \varepsilon^T] \quad (5.26)$$

Se observă că

$$\varepsilon(k) = \bar{\varphi}^T(k) \theta^* + v(k) - \varphi^T(k) \theta$$

$$n^* = \min(na - na^*, nb - nb^*) \geq 0$$

Θ^* poate fi extins la dimensiunea $na+nb$

$$\theta^* = [a_1^* \dots a_{na^*}^* \ 0 \dots 0 \ b_1^* b_2^* \dots b_{nb^*}^* \ 0 \dots 0]^T \quad (5.27)$$

iar

$$\bar{\varphi}(k) = [-y(k-1), \dots, -y(k-na), u(k-1), \dots, u(k-nb)]^T$$

deci $\dim \bar{\varphi}(k) = \dim \varphi(k)$ și $\dim \theta^* = \dim \hat{\theta}_{LS}$

Reziduul reprezintă incertitudinea în comportarea modelului determinat în raport cu comportarea sistemului. Dacă se calculează reziduul optimal

$$\hat{\varepsilon}(k) = \varphi^T(k)(\theta^* - \hat{\theta}_{LS}) + v(k) \quad (5.28)$$

se observă că acesta depinde atât de calitatea estimatorului cât și de perturbație. Atunci când $\hat{\theta}_{LS} \rightarrow \theta^*$, rezultă că $\hat{\varepsilon}(k) \rightarrow v(k)$

5.2.1. Analiza estimatorului celor mai mici pătrate

Prin analiza unui estimator se apreciază calitățile estimatorului și precizia lui.

Se presupune $n^* \geq 0$, $\bar{\varphi}(k) = \varphi(k)$ În expresia estimatorului *CMMP* se înlocuiește $y(k)$ din relația (5.15), pentru că ieșirea este generată de sistem. Se obține

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{LS} &= \left[\sum_{k=1}^N \varphi(k) \varphi^T(k) \right]^{-1} \sum_{k=1}^N \varphi(k) y(k) = \\ &= \left[\sum_{k=1}^N \varphi(k) \varphi^T(k) \right]^{-1} \left[\sum_{k=1}^N \varphi(k) (\bar{\varphi}^T(k) \theta^* + v(k)) \right]\end{aligned}\tag{5.29}$$

Dacă vectorul θ^* este de dimensiune extinsă atunci $\bar{\varphi}(k)$ poate fi înlocuit cu $\varphi(k)$ și prin urmare din (5.29) rezultă

(5.30)

$$\hat{\theta}_{LS} = \theta^* + \left[\sum_{k=1}^N \varphi(k) \varphi^T(k) \right]^{-1} \sum_{k=1}^N \varphi(k) v(k)$$

Conform ipotezelor generale acceptate, media $E[v(k)] = 0$, și din (5.30) rezultă că $E[\hat{\theta}_{LS}] = \theta^*$; deci estimatorul este nedeviat.

Teorema 5.1. Fiind dat un sistem fără reacție (S)

$$y(k) = \bar{\varphi}^T(k) \theta^* + v(k) = \varphi^T(k) \theta + v(k)$$

și considerând că sunt îndeplinite condițiile:

1. $u(k)$ și $v(k)$ necorelate;
2. $u(k)$ este semnal persistent de ordin nb ;
3. $v(k)$ este zgomot alb ;
4. $n^* = \min(na - na^*, nb - nb^*) \geq 0$

atunci estimatorul celor mai mici pătrate este consistent.

Demonstrație.

$\hat{\theta}_{LS}$ este un estimator consistent al parametrilor adevărați θ^* dacă

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\theta}_{LS} = \theta^* \quad (5.31)$$

Din analiza relațiilor (5.30) și (5.31) rezultă că $\hat{\theta}_{LS}$ este consistent dacă și numai dacă

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) \varphi^T(k) \right]^{-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) v(k) \right] = 0 \quad \text{(c.p.1)} \quad (5.32)$$

Elementele implicate în această limită se pot prelucra astfel:

a). În prima limită

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) \varphi^T(k) &= \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \begin{bmatrix} -y(k-1) \\ -y(k-na) \\ u(k-1) \\ u(k-nb) \end{bmatrix} [-y(k-1)..-y(k-na)...u(k-1),..u(k-nb)] \end{aligned}$$

elementele matricei sunt **covarianțe de eșantion**.

În condițiile ipotezelor făcute asupra sistemului și intrării $u(k)$, covarianțele de eșantion tind la cele teoretice, astfel că se poate scrie

$$R = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) \varphi^T(k) = \begin{bmatrix} R_{yy} & \dots & -R_{yu} \\ -R_{uy} & \dots & R_{uu} \end{bmatrix} \begin{matrix} na \\ nb \end{matrix} \quad (5.33)$$

în care R_{uu} și R_{yy} sunt matricile Toeplitz ale semnalelor de intrare și respectiv, de ieșire, iar R_{uy} , R_{yu} sunt matricile de intercorelație intrare - ieșire. Deoarece $u(k)$ este un semnal persistent nb , $SPnb$, rezultă că $R_{uu} > 0$.

În ipotezele făcute, dacă la intrarea sistemului se aplică un semnal persistent, atunci ieșirea acestuia este de asemenea un semnal persistent, deci și $R_{yy} > 0$.

Pentru $n^* \geq 0$ matricea R este pozitiv definită ; aceasta este condiția necesară pentru ca funcția criteriu să atingă un minim

$$R = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N \varphi(k) \varphi^T(k) > 0 \quad (5.34)$$

b). A doua limită din (5.32) se poate scrie

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N \varphi(k) v(k) = \begin{bmatrix} -R_{vy}(1) \\ \dots\dots\dots \\ -R_{vy}(na) \\ R_{vu}(1) \\ \dots\dots\dots \\ R_{vu}(nb) \end{bmatrix}$$

La limită elementele acestei matrici reprezintă corelațiile teoretice. În ipoteza că $u(k)$ și $v(k)$ sunt necorelate rezultă $R_{vu}(k) = 0$, pentru $k=1, 2, \dots, nb$. Deoarece

$$R_{vy}(k) = R_{v(x+v)}(k) = R_{vx}(k) + R_{vv}(k) = R_{vv}(k) = 0$$

și cum $v(k)$ este considerat zgomot alb, rezultă că și $R_{vv}(k) = 0$, pentru $k = 1, 2, \dots, n$. În această situație

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) v(k) = 0 \quad (5.35)$$

și estimația $\hat{\theta}_{LS}$ este consistentă în condițiile teoremei 5.1.

Observație. Condiția de persistență impusă semnalului de intrare este de fapt o condiție de existență a soluției problemei de minimizare a funcției criteriu ; în caz contrar nu se poate afirma nimic despre singularitatea matricei

$$R_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) \varphi^T(k)$$

Faptul că estimatorul $\hat{\theta}_{LS}$ este consistent numai dacă $v(k)$ este zgomot alb restrânge aplicabilitatea acestuia numai la cazurile în care modelul de zgomot $H_1(q^{-1})=1$, cazuri care sunt destul de rare. Există totuși situații particulare în care estimatorul $\hat{\theta}_{LS}$, care este un estimator al părții deterministe a sistemului, este consistent chiar dacă zgomotul este corelat.

Metoda celor mai mici pătrate poate fi ilustrată prin schema din fig. 5.2. în care $\varepsilon(k)$

$$\varepsilon(k) = A(q^{-1})y(k) - B(q^{-1})u(k) \quad (5.36)$$

este eroarea de modelare generalizată. Se observă că algoritmul CMMP conduce la minimizarea erorii medii pătratice generalizate

$$\hat{\theta}_{LS} = \arg \min_{\theta} \sum_{k=1}^N \varepsilon^2(k) \quad (5.37)$$

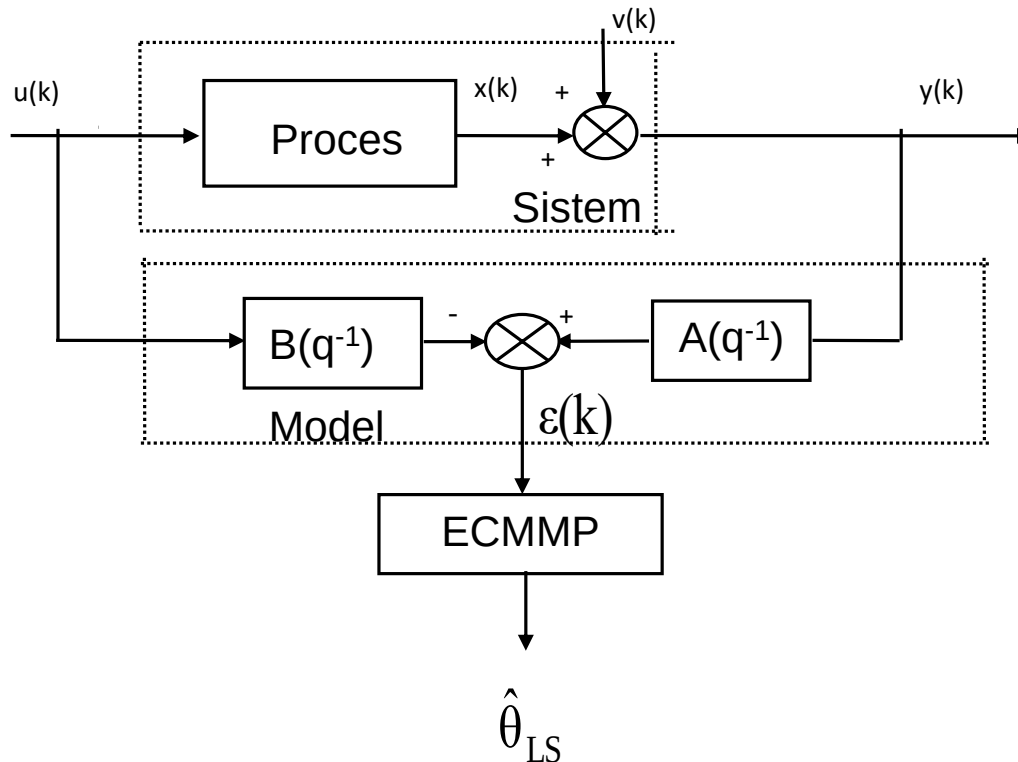


Fig. 5.2

5.2.2. Estimarea parametrilor pentru modele ARX

În MATLAB metoda CMMP off-line este utilizată pentru estimarea parametrilor modelelor de tip ARX descrise de ecuații cu diferențe de forma

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k - ni) + e(k)$$

Este necesar să se definească matricea de date intrare-ieșire $z=[y, u]$ sau *data* și să se cunoască structura definită prin vectorul $nn= [na \ nb \ ni]$, în care *na* și *nb* sunt gradele polinoamelor *A* și respectiv *B*, iar *ni* este întârzierea. Modelul *m* obținut este în forma polinomială IDPOLY pentru sistemele cu o singură ieșire sau în forma IDARX pentru sisteme cu mai multe ieșiri, sau sub forma THETA. Se utilizează **funcția arx** care este apelată în formele:

$$\begin{aligned} m &= arx(z, nn); \quad m = arx(data, nn); \\ m &= arx(data, 'na', na, 'nb', nb, 'ni', ni) \end{aligned}$$

(5.38)

```
m = arx(z, nn); m = arx(data, nn);  
m = arx(data, 'na', na, 'nb', nb, 'ni', ni)
```

Pentru găsirea soluției se minimizează eroarea de predicție pe baza algoritmului Gauss-Newton. Tipic se utilizează opțiunile:

focus('prediction', 'simulation', 'stability' or a prefilter);

inputdelay;

fixeparameter (parametrii unui model nominal care rămân fixați);

noicevariance (determină norma ieșirii în cazul ieșirilor multiple).

Exemplul 5.2. Se consideră sistemul monovariabil discret definit prin polinoamele $A=[1 \ -1.2 \ 0.6]$; $B=[0 \ 1 \ 0.5]$; pentru partea deterministă și $C=[1 \ -0.8 \ 0.4]$ pentru caracterizarea perturbațiilor. Se asociază acestui sistem modelul m

>> m=idpoly(A,B,C).

Discrete-time IDPOLY model: $A(q)y(t) = B(q)u(t) + C(q)e(t)$; $t=k$

$$A(q) = 1 - 1.2 q^{-1} + 0.6 q^{-2}$$

$$B(q) = q^{-1} + 0.5 q^{-2}$$

$$C(q) = 1 - 0.8 q^{-1} + 0.4 q^{-2}$$

Se generează un semnal de intrare pseudoaleator binar $u(k)$ și un semnal perturbator aleator $e(k)$:

```
>> u=sign(randn(500,1));
```

```
>> e=0.1*randn(500,1);
```

Se determină prin simulare numerică răspunsul sistemului $y(k)$ pentru aceste semnale de intrare

```
>>y=idsim([u,v],m); % comentariu v=e;
```

Se consideră o matrice z cu vectori coloană conținând datele de ieșire și de intrare, eșantioanele cu numerele de la 1 la 300.

```
>>z=[y(1:300) u(1:300)];
```

- Se reprezintă grafic primele 100 de eșantioane de intrare-ieșire, prezentate în fig.5.3
- >>idplot(z, 1:100)

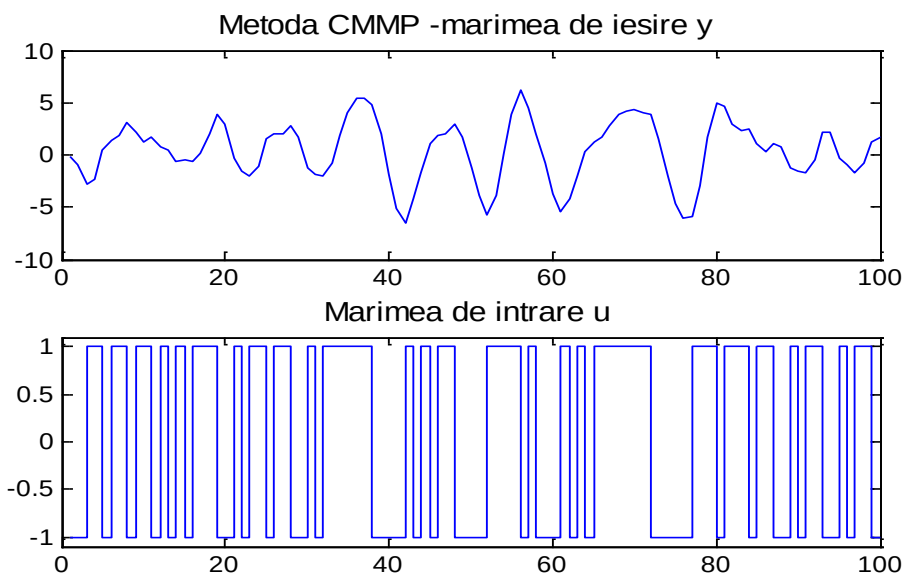


Fig. 5.3

Prin metoda CMMP se caută un model cu doi poli, $na=2$, cu două zerouri, $nb=2$ și întârzierea $ni=1$. Cu funcția *arx* se obține modelul *tha*, care este afișat cu funcția *present*.

```
>>nn=[2 2 1]
```

```
>>tha=arx(z,nn) ; >>present(tha)
```

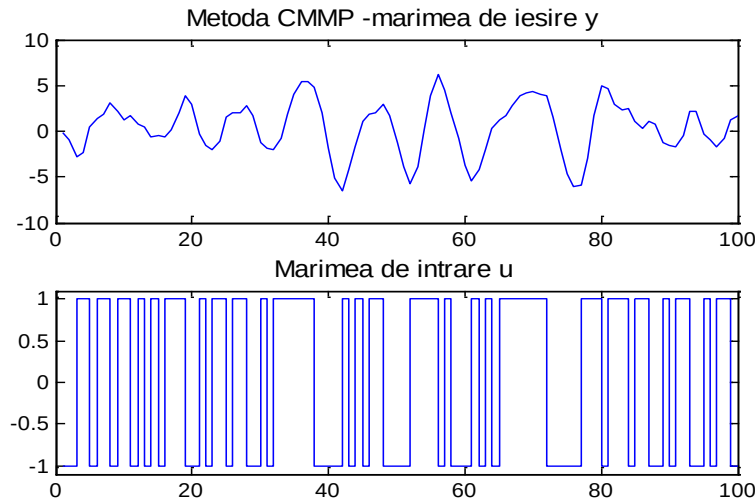


Fig. 5.3

Discrete-time IDPOLY model: $A(q)y(t) = B(q)u(t) + e(t)$; % $t = k$

$A(q) = 1 - 1.193 (+0.005301) q^{-1} + 0.5952 (+0.004927) q^{-2}$

$B(q) = 0.9961 (+0.007202) q^{-1} + 0.5144 (+0.009201) q^{-2}$

Estimated using ARX from data set z

Loss function 0.0148494 and FPE 0.0152507

Sampling interval: 1

Sunt prezentate valorile coeficienților polinoamelor și abaterile lor standard. Cu funcția **resid** se determină reziduurile **ea** ale modelului ARX și se reprezintă grafic în fig. 5.4.

```
>>ea=resid(z,tha);
```

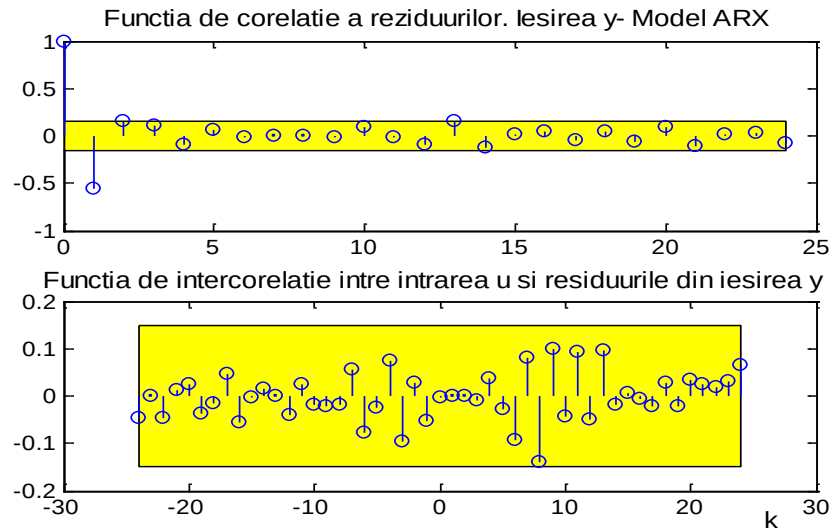


Fig. 5.4

Se reprezintă grafic răspunsul sistemului, y și a modelului ARX, y_m , pentru primele 50 de eșantioane, în fig.5.5

```
>>plot(t1,y(1:50),'b',t1,ym(1:50),'g');grid
>>title('Răspuns sistem y, răspuns model ARX - ym')
```

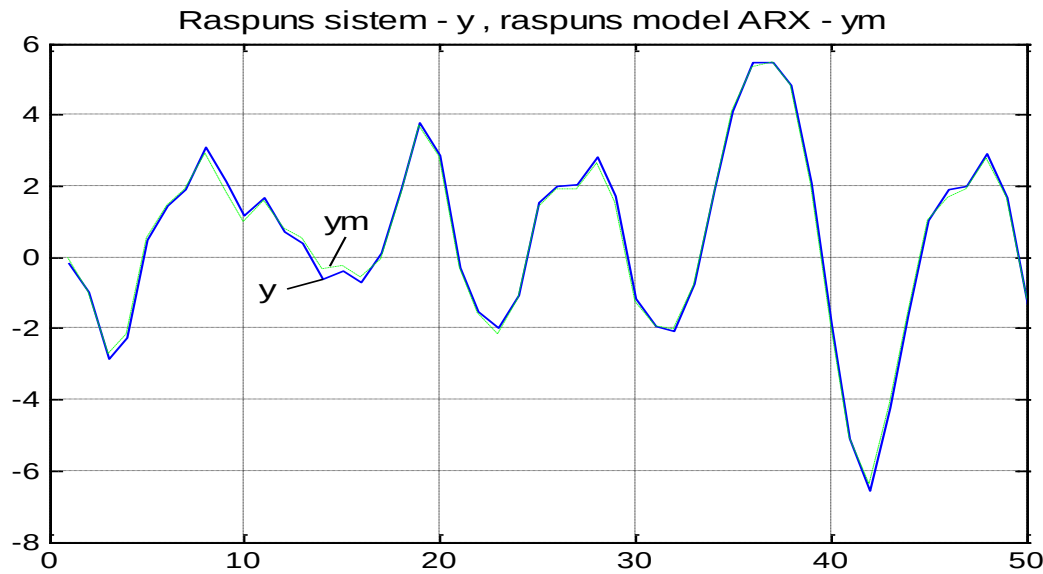


Fig. 5.5